**Тема 1. Запись дифференциальных уравнений в операторном виде с применением преобразований Лапласа**

**Цель и содержание задания:** Научиться составлять дифференциальные уравнения, описывающие САР и находить их решение, включая вычисление динамических характеристик.

Динамика любого звена или системы описывается дифференциальным уравнением в общем виде

$$a_n d^n y/dt^n + a_{n-1} d^{n-1}/dt^{n-1} + \ldots + a_0 y =$$
$$b_m d^m x/dt^m + b_{m-1} d^{m-1} x/dt^{m-1} + \ldots + b_0 x \qquad (1.1)$$

где $a_n \ldots a_0;\ b_m \ldots b_0$ - постоянные коэффициенты, которые отражают параметры системы; $n \geq m$.

При решении дифференциального уравнения его приводят к операторной форме, применив прямое преобразование Лапласа. Суть преобразования состоит в том, что действительные переменные $Y(t)$ и $X(t)$, как функции времени, представляют на комплексной плоскости и переводят в функции комплексного переменного $p=j\omega$. В этом случае переменные $Y(p)$ и $X(p)$ являются изображениями их оригиналов $Y(t)$ и $X(t)$. В уравнении (1.1) оператор дифференцирования $d/dt$ заменяют на $p$, $Y(t)$ и $X(t)$ их изображениями $Y(p)$ и $X(p)$ и получают операторную форму записи

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_0 Y(p) =$$
$$b_m p^m X(p) + b_{m-1} p^{m-1} X(p) + \ldots + b_0 X(p)$$

или

$$Y(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0) =$$
$$X(p)(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0) \qquad (1.2)$$

Откуда находим

$$Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0) X(p) / (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0)$$

Выражения, обозначенные как

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 = H(p), \qquad (1.3)$$

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0 = K(p), \qquad (1.4)$$

называются соответственно выходными и входным операторными полиномами. Подставив выражения (1.4) в уравнение (1.3) , получают компактную операторную форму записи дифференциального уравнения

$$Y(p) = K(p)/H(p) \cdot X(p) \qquad (1.5)$$

При известной входной величине *X(t)* и ее изображении *X(p)* при начальных условиях находят изображение *Y(p)*.

Изображения простейших функций и их оригиналы определяются по таблице преобразований Лапласа в приложении А.

Итак, решить дифференциальное уравнение, значит найти зависимость изменения выходной величины звена или системы в момент переходного процесса после подачи на их вход входной величины, изменяющейся по известному закону.

Порядок решения:

а) исходное дифференциальное уравнение записывают в операторной форме по формуле (1.2) ;

б) находят выражение для *Y(p)* по формуле (1.3);

в) по таблице приложения А находят изображение *X (p)* (вид входного сигнала *X (t)* и начальные условия определяются условиями задачи) и подставляют в формулу (1.3);

г) находят оригинал *Y(t)* , предварительно приведя выражение для *Y(p)* к табличному в соответствии с приложением А.

д) задаваясь значениями времени «t» строят график изменения *Y(t)* во время переходного процесса (это требование оговаривается условиями задачи).

Пример. Динамика устройства описывается дифференциальным уравнением вида

$$2\frac{dY}{dt} + Y(t) = 3x\,.$$

Задание:

а) найти решение при нулевых начальных условиях: $Y(0)=0,\ \frac{dY}{dt}=0$, если на вход устройства подан единичный входной сигнал $X(t)=1(t)$;

б) представить график переходного процесса.

Решение.

Записываем дифференциальное уравнение в операторной форме

$$2pY(p)+Y(p)=3x(p)$$

$$Y(p)(2p+1)=3x(p).$$

Изображение *X(p)* находим по таблице приложения А поз.1

$$X(p) = L\{1(t)\} = 1/p,$$

$$Y(p) = 3/(2p+1)p = 3/2p(p+0,5).$$

Согласно приложению А поз 6

$$1/p(p+a) \to (1-e^{-at}).$$

Тогда $Y(t)$, как обратное преобразование от $Y(p)$ будет равно

$$Y(t) = L^{-1}\{3/2p(p+0,5)\} = 3(1-e^{-0,5t}).$$

Это и есть зависимость, отражающая переходный процесс в устройстве б) при $t=0$ $Y(t)=0$, при $t \to \infty$ $Y(t) \to 3$

Зависимость представлена возрастающей экспонентой (рисунок 1.1).

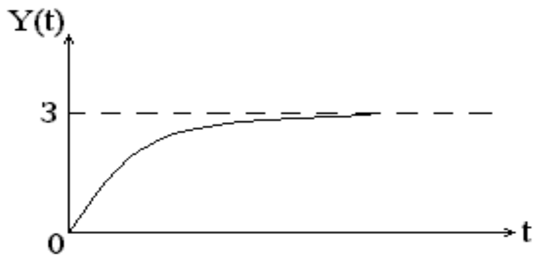


Рисунок 1.1

1) $4\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5y = 4\dfrac{dx}{dt} + x$

2) $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5y - 4x = 6\dfrac{dx}{dt}$

3) $5\dfrac{dy}{dt} + 7y = 8\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2x$

4) $3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = 4\dfrac{dx}{dt} + 3x$

5) $10\dfrac{d^2y}{dt^2} + 10y = 2\dfrac{dx}{dt} + 5x$

6) $11\dfrac{d^2y}{dt^2} - 10x = 2\dfrac{dx}{dt} - 3y$

7) $12\dfrac{d^2y}{dt^2} + 10y = 3\dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{d^2x}{dt^2}$

8) $4\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = 2\dfrac{dx}{dt} + 2x$

9) $3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y - 4x = 2\dfrac{dx}{dt} + 3\dfrac{dy}{dt}$

10) $2\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4x - 12\dfrac{dx}{dt} = -6y - 7\dfrac{dy}{dt}$

11) $3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 3x - 6\dfrac{dx}{dt}$

12) $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} = 3\dfrac{d^2x}{dt} - 2y + 4x$

13) $3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 3x - 2\dfrac{dx}{dt}$

14) $3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 8x + 4\dfrac{dx}{dt}$

15) $8\dfrac{d^2y}{dt} + 2y = 4x - 5\dfrac{dx}{dt}$

16) $9\dfrac{dy}{dt} + 2y = 4x$

1) $6\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 10y = 4x - 6\frac{d^5y}{dt^5}$

2) $6\frac{d^3y}{dt^3} + 7\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 7y = 4x + 2\frac{dx}{dt} - 2\frac{d^5y}{dt^5}$

3) $2\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 3x - 3\frac{d^5y}{dt^5}$

4) $3\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^3y}{dt^3} + 7\frac{dy}{dt} + 2y = 10x - 6\frac{d^5y}{dt^5}$

5) $10\frac{d^4y}{dt^4} + 5\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 2x - 4\frac{d^5y}{dt^5}$

6) $3\frac{d^5y}{dt^3} + 2\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3x$

7) $4\frac{d^4y}{dt^4} + 4\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 2y = 10x - 5\frac{d^5y}{dt^5}$

8) $6\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt^2} + 3y = 5x - 7\frac{d^5y}{dt^5}$

9) $2\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt^2} + 3y = 6x - 8\frac{d^5y}{dt^5} - 4\frac{d^4y}{dt^4}$

10) $5\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy^2}{dt^2} + 2y = 7x - 3\frac{d^5y}{dt^5}$

11) $10\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 10y = 15x - 2\frac{d^5y}{dt^5} - 4\frac{d^4y}{dt^4}$

12) $6\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 4y = 10x - 6\frac{d^5y}{dt^5} - 4\frac{d^4y}{dt^4}$

13) $8\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 2y = 17x - 5\frac{d^5y}{dt^5}$

14) $5\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{d^2y}{dt} + 2y = 12x - 2\frac{d^4y}{dt^4}$

15) $2\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 3x - 8\frac{d^5y}{dt^5} - 4\frac{d^4y}{dt^4}$

16) $4\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 4x - 7\frac{d^5y}{dt^5}$